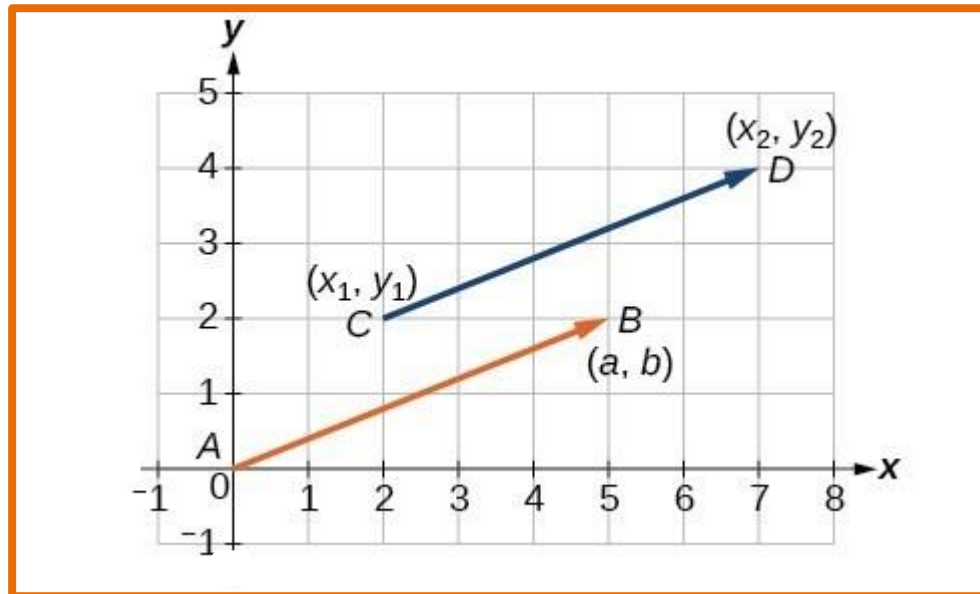


Факултет заштите на раду у Нишу
Предавања из предмета МАТЕМАТИКА
ВЕКТОРИ – I део



- Дефиниција вектора
- Операције са векторима
- Декартов правоугли координатни систем
- Координате тачака и вектора

Предметни наставник:
др Милош Цветковић

СКАЛАРИ И ВЕКТОРИ

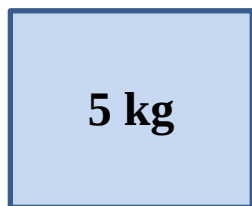
Величине које срећемо у математици, природним и техничким наукама могу се поделити на **скаларне величине** (**скалари**) и **векторске величине** (**вектори**).

СКАЛАРИ су величине које су дефинисане само својом бројном вредношћу.

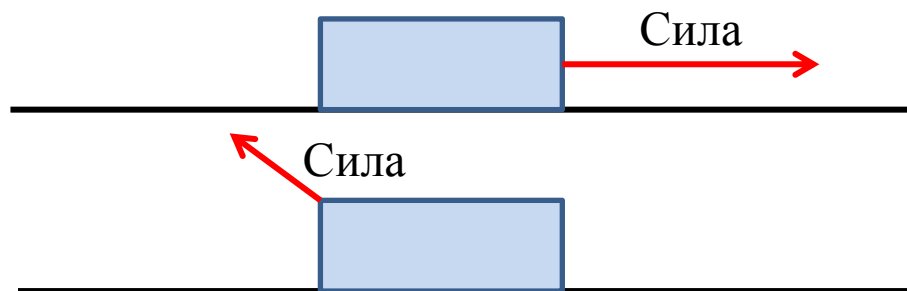
ПРИМЕРИ: површина геометријских фигура, запремина тела, маса, температура.

ВЕКТОРИ су величине које су описане бројном вредношћу, правцем и смером.

ПРИМЕРИ: брзина, убрзање, сила.



Маса тела је 5 kg – овај податак је довољан.

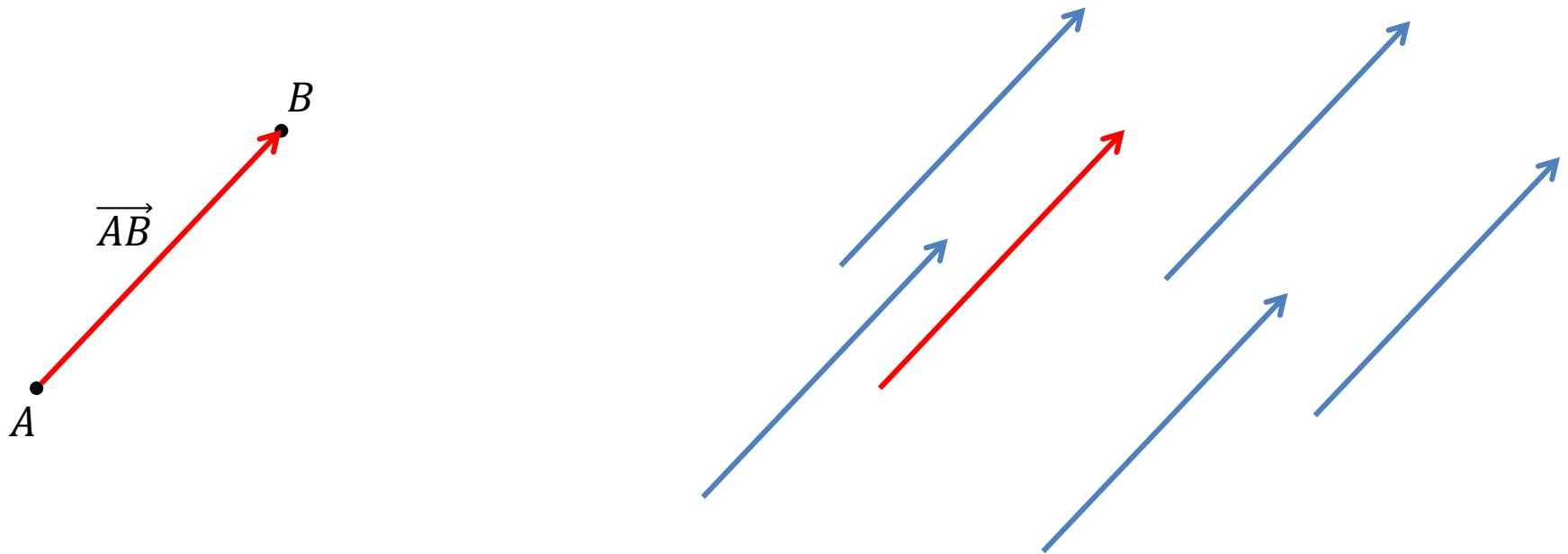


Када на тело делује сила битан је правац и смер деловања те силе.

ВЕКТОРИ У РАВНИ

Вектор је део праве линије (дуж) са назначеним смером (стрелица показује смер, слика лево). Тачка A је почетак вектора са слике, а тачка B је крај тог вектора. Вектор код којег је тачка A почетак и тачка B крај означавамо са $\overrightarrow{AB}$.

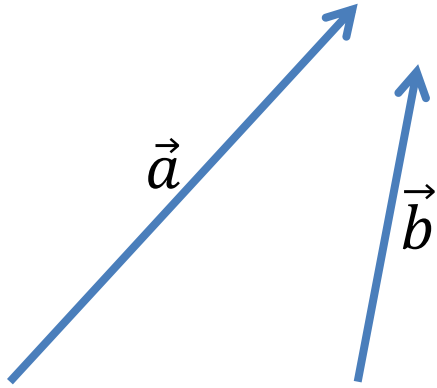
Интензитет вектора $\overrightarrow{AB}$ је дужина дужи AB и обележава се са $|\overrightarrow{AB}|$. **Смер** вектора је одређен стрелицом. Права линија којој припада вектор представља **правац** вектора.



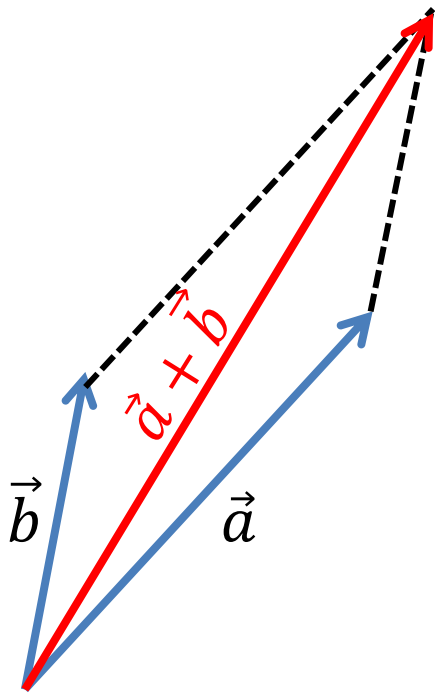
Два вектора имају исти правац ако леже на истој правој или на паралелним правима. Два вектора су **једнака** ако имају исти правац, смер и интензитет. Сви вектори на слици десно су једнаки.

За векторе често користимо следеће ознаке: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$, ...

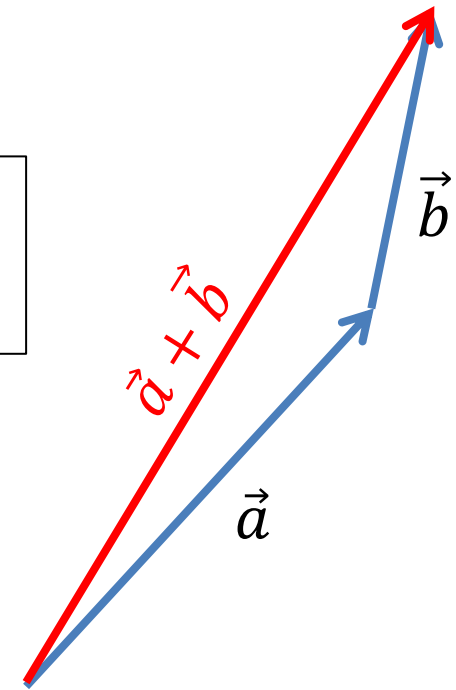
ВЕКТОРИ У РАВНИ – сабирање вектора



$\vec{a}$ и $\vec{b}$ су дати вектори. Очигледно, они немају исти почетак.



Вектор $\vec{a} + \vec{b}$ је збир
вектора $\vec{a}$ и вектора $\vec{b}$



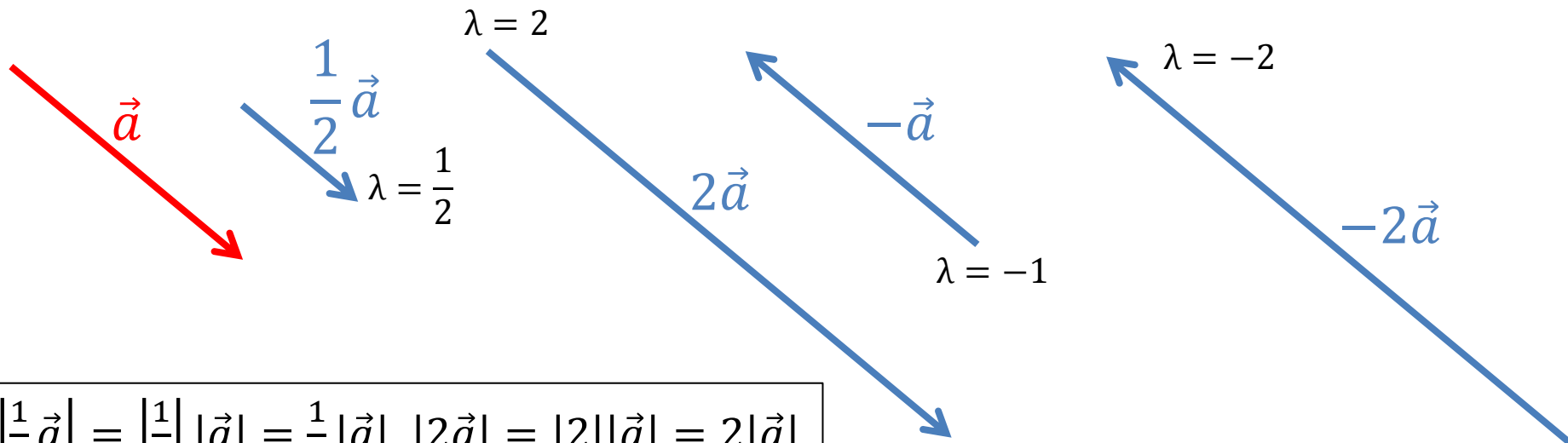
МЕТОД ПАРАЛЕЛОГРАМА – доводимо
почетке вектора у исту тачку.

МЕТОД ТРОУГЛА – почетак вектора
 $\vec{b}$ се поклапа са крајем вектора $\vec{a}$

ВЕКТОРИ У РАВНИ – множење вектора скаларом

Ако је λ реалан број и $\vec{a}$ вектор, онда вектор $\lambda\vec{a}$ дефинишемо на следећи начин:

- Вектор $\lambda\vec{a}$ има исти правац као вектор $\vec{a}$;
- $\lambda\vec{a}$ и $\vec{a}$ имају исте смерове ако је $\lambda > 0$, а супротне смерове ако је $\lambda < 0$;
- Интензитет вектора $\lambda\vec{a}$ је $|\lambda||\vec{a}|$, тј. $|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$.



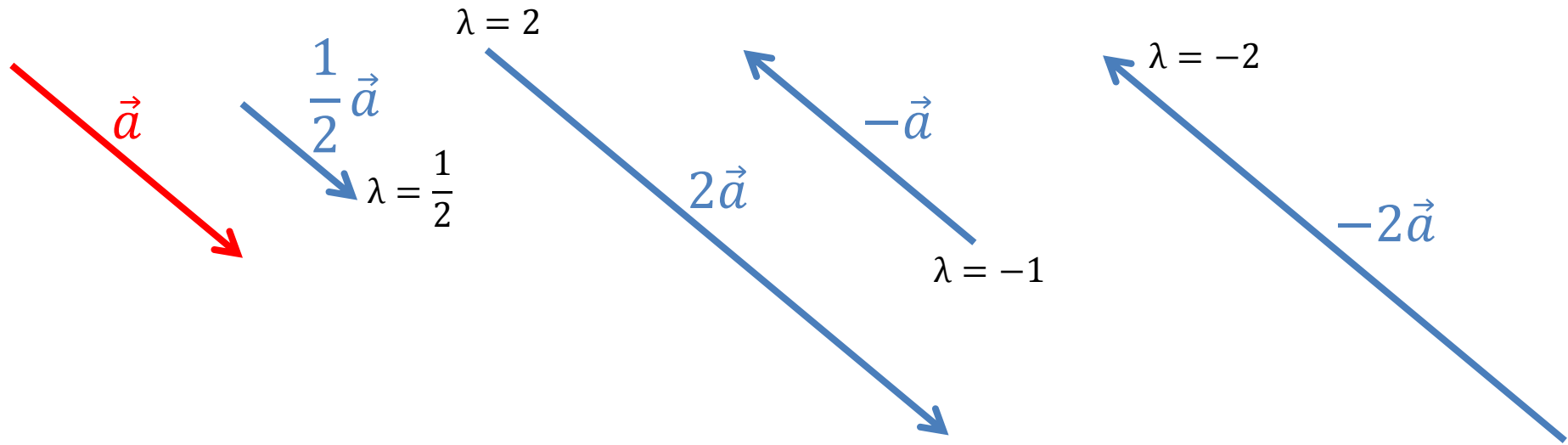
$$\left|\frac{1}{2}\vec{a}\right| = \left|\frac{1}{2}\right||\vec{a}| = \frac{1}{2}|\vec{a}|, |2\vec{a}| = |2||\vec{a}| = 2|\vec{a}|$$

Вектор $(-1)\vec{a}$ записујемо као $-\vec{a}$.

$$|-\vec{a}| = |-1||\vec{a}| = 1 \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|$$

Вектор $-\vec{a}$ има исти правац и интензитет као и вектор $\vec{a}$, али му је смер супротан. Вектор $-\vec{a}$ је **супротан** вектор вектору $\vec{a}$.

ВЕКТОРИ У РАВНИ – множење вектора скаларом



Сви вектори на слици имају исти правац. Разликују се по смеру или по интензитету. За два вектора кажемо да су **колинеарни** ако леже на истој правој или на паралелним правима.

Множење вектора скаларом се манифестује продужавањем или скраћивањем вектора.

Вектор чији је интензитет једнак нули назива се **нула-вектор**. Почетак и крај овог вектора се поклапају. Правац и смер нула-вектора нису дефинисани. Нула-вектор обележавамо са $\vec{0}$.

$$\lambda = 0: |0 \cdot \vec{a}| = |0||\vec{a}| = 0 \cdot |\vec{a}| = 0$$

$$0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$$

$$\vec{a} = \vec{0}: |\lambda \cdot \vec{0}| = |\lambda||\vec{0}| = |\lambda| \cdot 0 = 0$$

$$\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

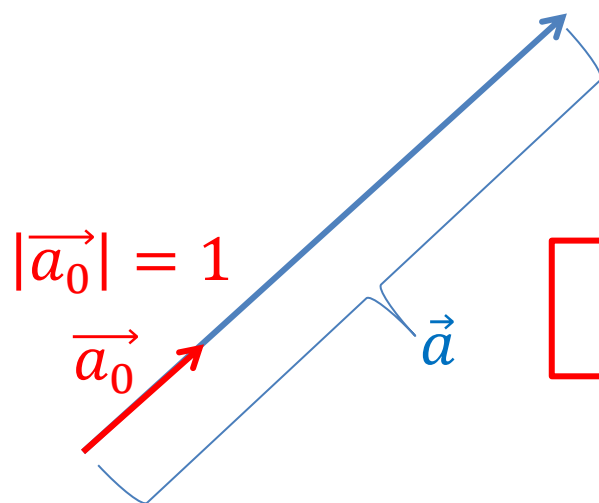
ВЕКТОРИ У РАВНИ – јединични вектор

Јединичним вектором се назива вектор чији је интензитет једнак јединици.

Нека је $\vec{a}$ дати вектор. Посматрајмо вектор $\vec{a_0} = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$ ($\frac{1}{|\vec{a}|}$ је број већи од нуле).
Вектори $\vec{a_0}$ и $\vec{a}$ имају исти правац и смер.

$$|\vec{a_0}| = \left| \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} \right| = \left| \frac{1}{|\vec{a}|} \right| |\vec{a}| = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| = 1$$

Вектор $\vec{a_0} = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$ је јединични вектор вектора $\vec{a}$.

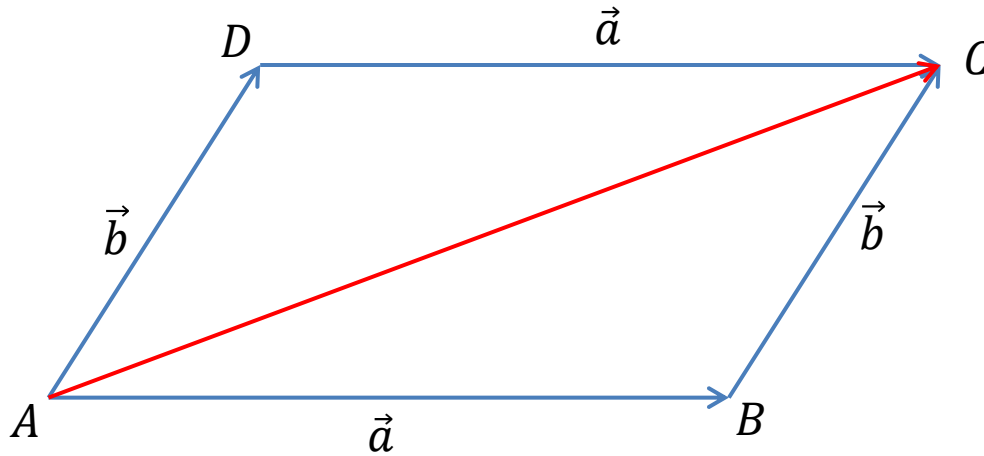


$$\vec{a} = |\vec{a}| \vec{a_0}$$



$$\begin{aligned} |\vec{a_0}| &= 1 & |\vec{a}| &= 3 \\ \vec{a_0} &= \frac{1}{3} \vec{a} & \vec{a} &= 3 \cdot \vec{a_0} \end{aligned}$$

ВЕКТОРИ У РАВНИ – сабирање вектора – КОМУТАТИВНИ ЗАКОН



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \vec{a}$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \vec{b}$$

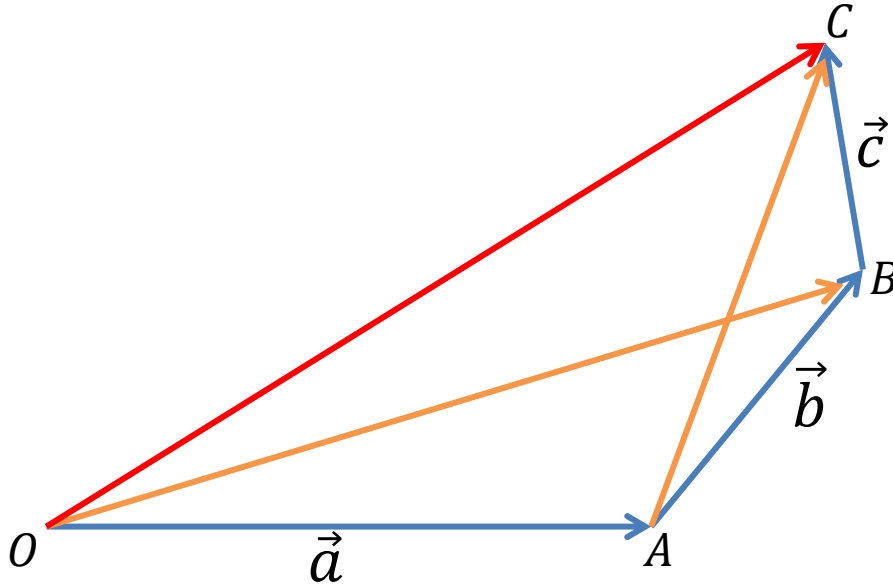
Троугао ABC : $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$

Троугао ACD : $\vec{b} + \vec{a} = \overrightarrow{AC}$

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

За сабирање вектора важи комутативни закон.

ВЕКТОРИ У РАВНИ – сабирање вектора – асоцијативни закон



$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{b} + \vec{c}$$

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

За сабирање вектора важи асоцијативни закон.

ВЕКТОРИ У РАВНИ – сабирање вектора – још неке особине



$$\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$$

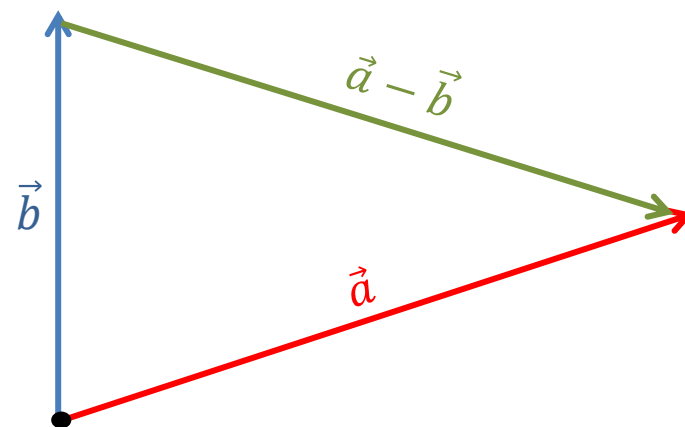
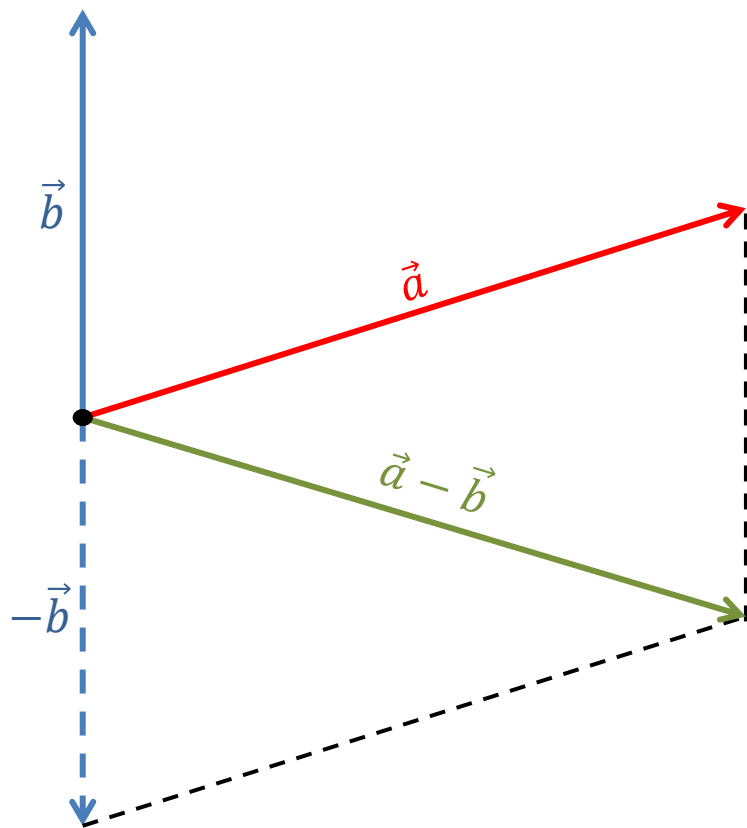


Збир супротних вектора једнак је нула-вектору.

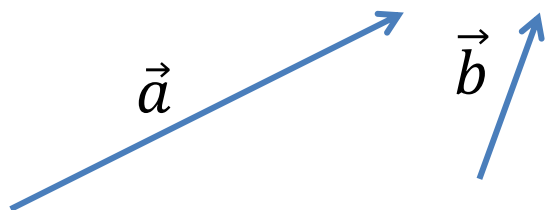
$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$$

Одужимање вектора

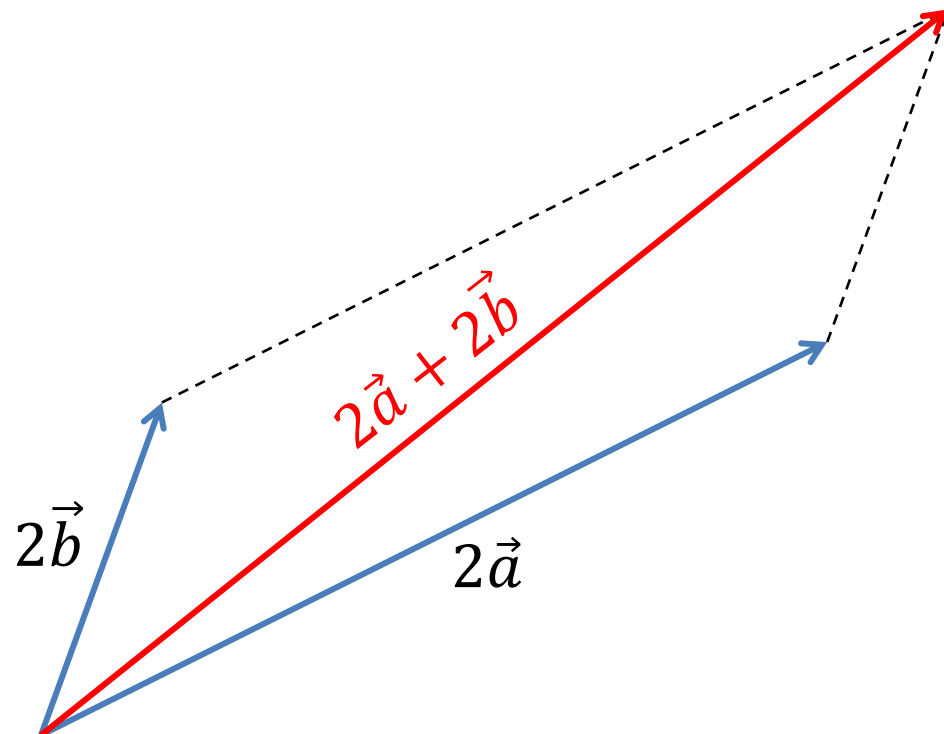
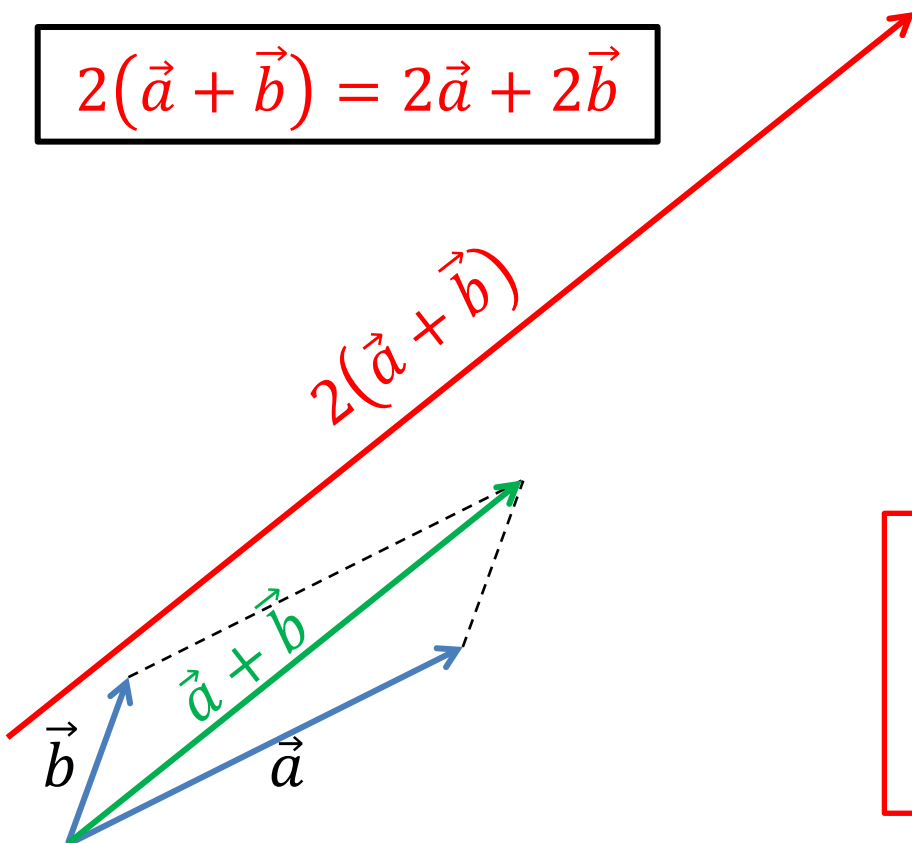
Разлика вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $\longrightarrow$ $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$



ВЕКТОРИ У РАВНИ – множење вектора скаларом – особине



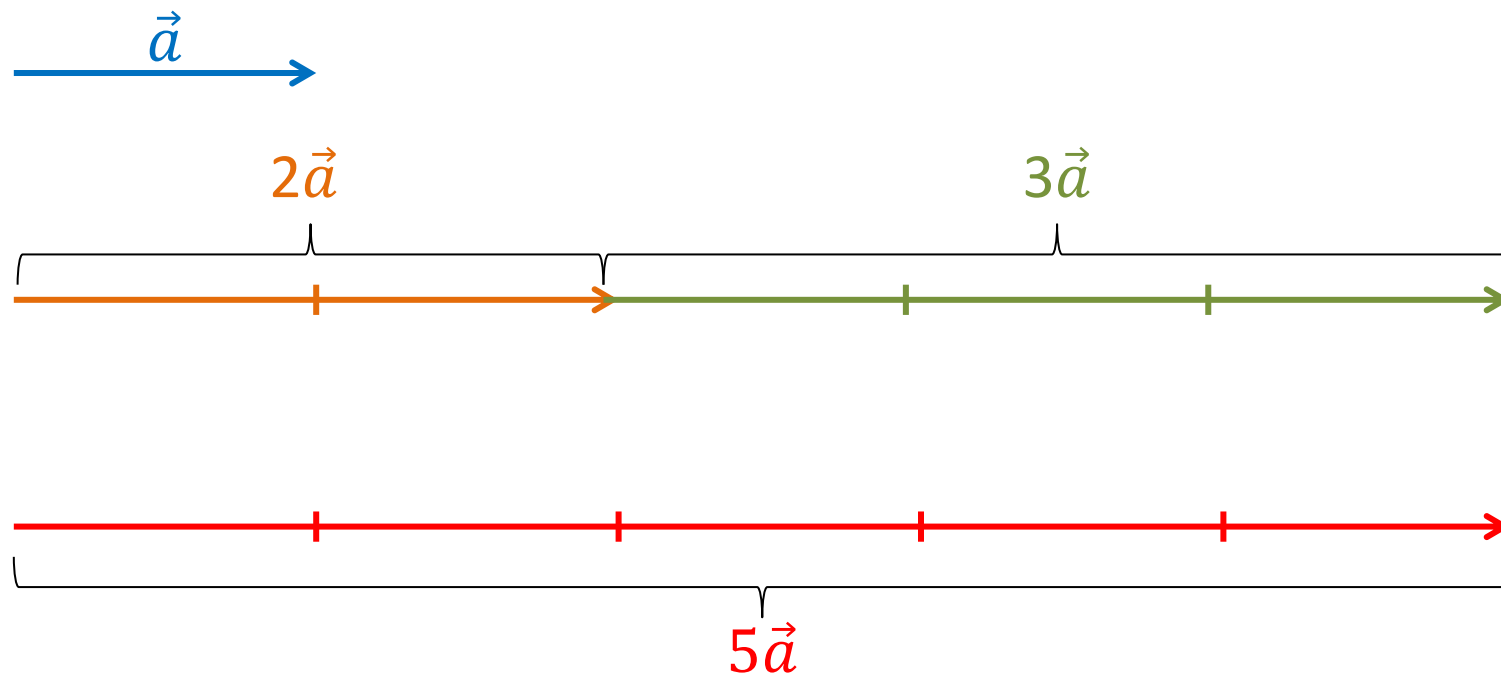
$$2(\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} + 2\vec{b}$$



Генерално важи:

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$$

ВЕКТОРИ У РАВНИ – множење вектора скаларом – особине

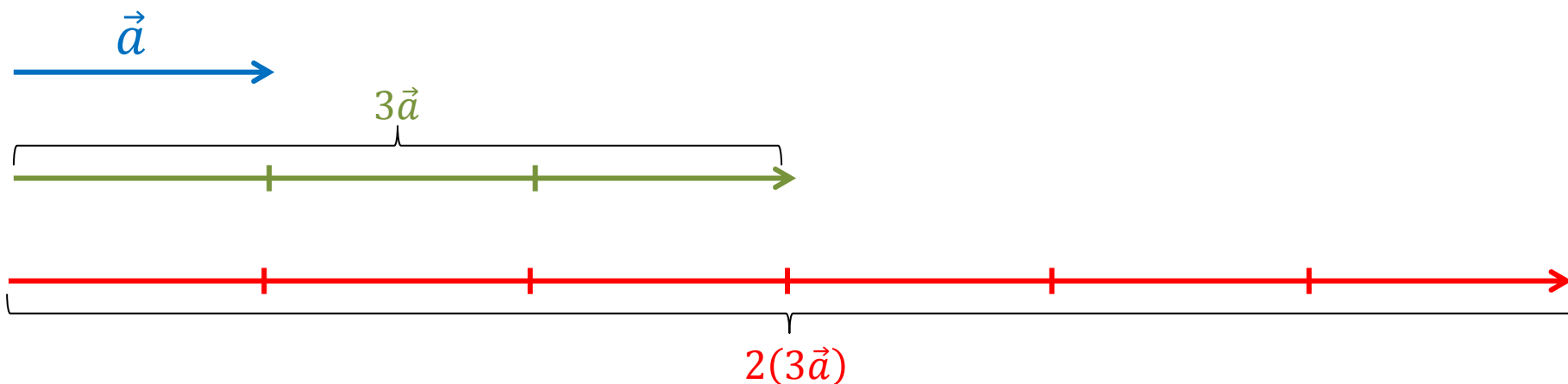


Са слике закључујемо: $2\vec{a} + 3\vec{a}$ = $5\vec{a}$ = $(2 + 3)\vec{a}$

Генерално важи:

$$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$$

ВЕКТОРИ У РАВНИ – множење вектора скаларом – особине



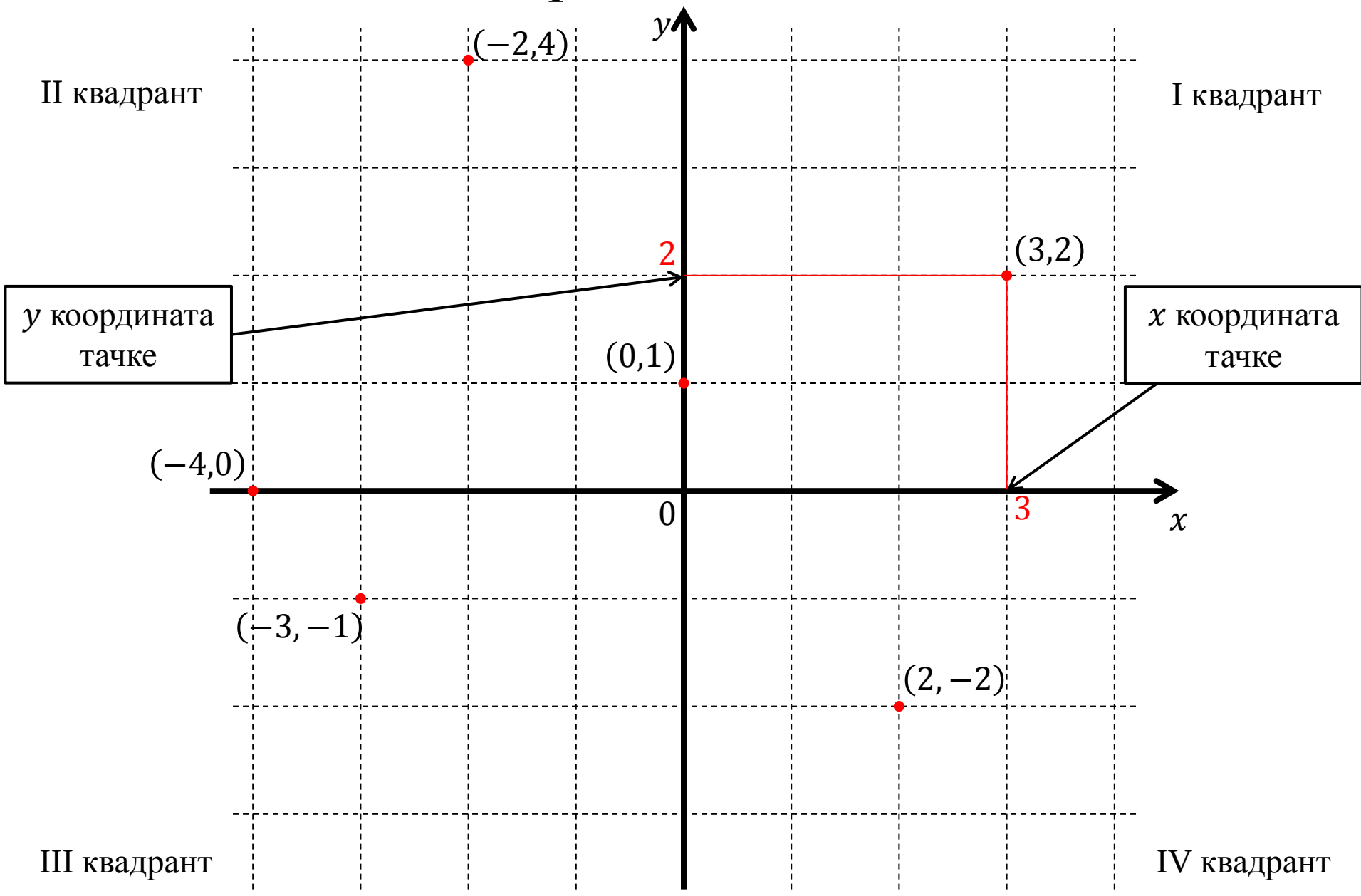
Вектор $2(3\vec{a})$ има исти правац и смер као и вектор $3\vec{a}$, али његов интензитет је два пута већи од интензитета вектора $3\vec{a}$.

Са слике закључујемо: $2(3\vec{a})$ = $6\vec{a}$ = $(2 \cdot 3)\vec{a}$

Генерално важи:

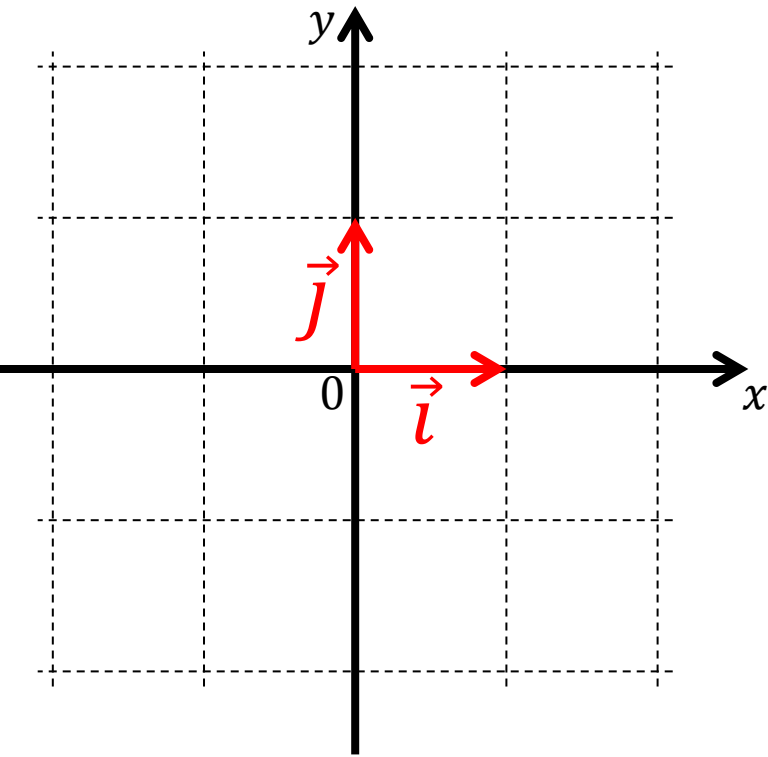
$$\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$$

Декартов правоугли координатни систем у равни – координате тачке



Декартов правоугли координатни систем у равни - ортови

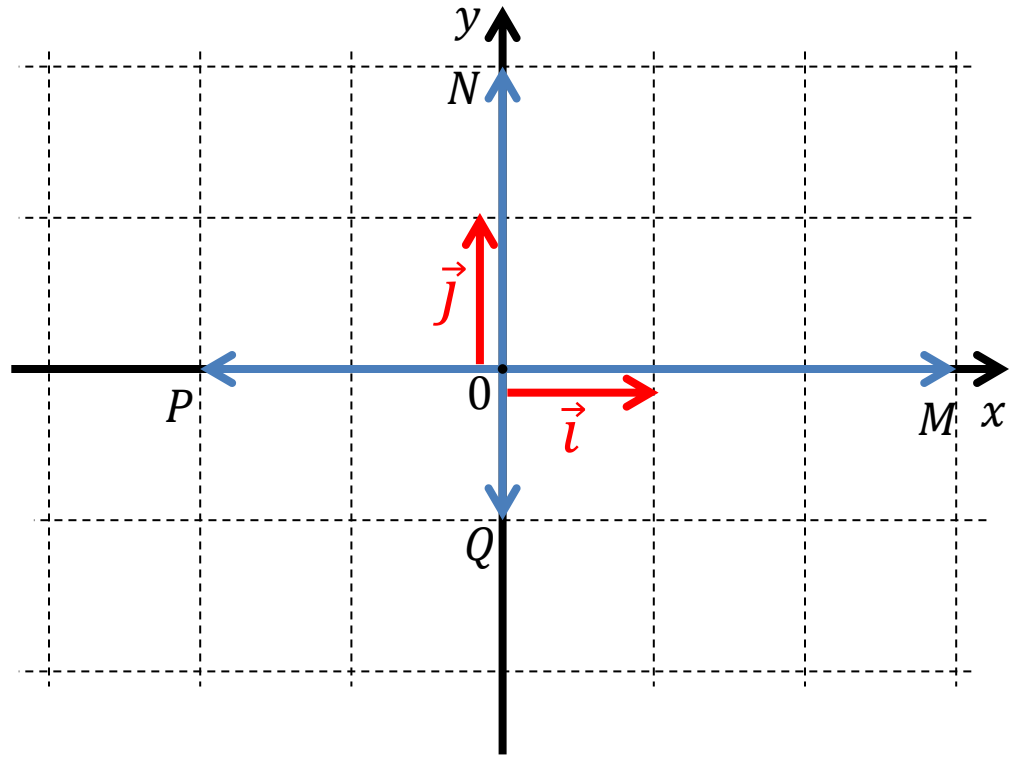
$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$$



$\vec{i}$ и $\vec{j}$ су јединични вектори.

$\vec{i}$ је орт x осе, $\vec{j}$ је орт y осе.

Угао између вектора $\vec{i}$ и $\vec{j}$ је 90° .



$$\overrightarrow{OM} = 3\vec{i}$$

$$\overrightarrow{ON} = 2\vec{j}$$

$$\overrightarrow{OP} = -2\vec{i}$$

$$\overrightarrow{OQ} = -\vec{j}$$

Вектори у равни – координате вектора

Координате вектора $\vec{a}$:

$$\vec{a} = (3, 2)$$

Почетак: $(-4, -1)$

Крај: $(-1, 1)$

$$-1 - (-4) = 3$$

$$1 - (-1) = 2$$

Почетак: $(0, 0)$

Крај: $(3, 2)$

$$3 - 0 = 3$$

$$2 - 0 = 2$$

$$\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$$

Почетак: $(4, 2)$

Крај: $(7, 4)$

$$7 - 4 = 3$$

$$4 - 2 = 2$$

Почетак: $(4, -2)$

Крај: $(7, 0)$

$$7 - 4 = 3$$

$$0 - (-2) = 2$$

$$\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$$

Почетак: $(-2, -4)$

Крај: $(1, -2)$

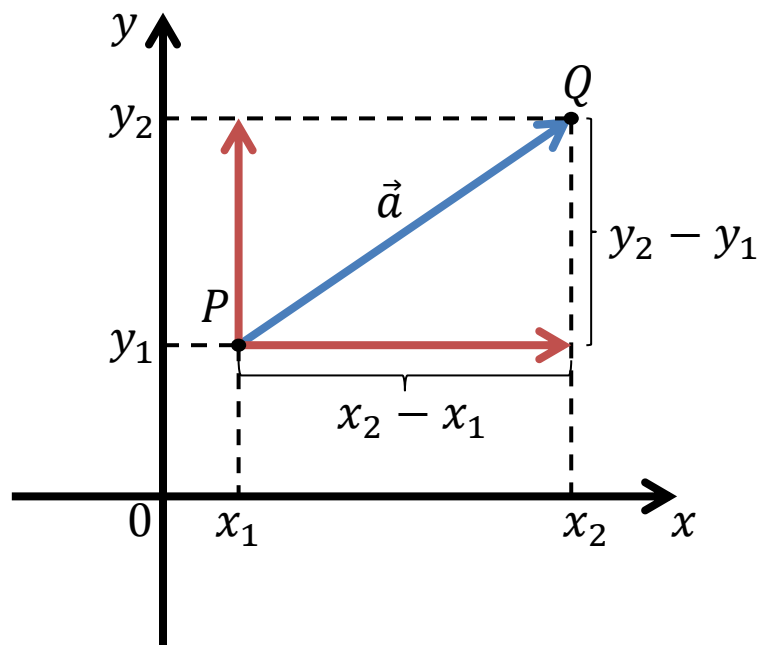
$$1 - (-2) = 3$$

$$-2 - (-4) = 2$$

$$\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$$

Мењају се координате почетка и краја вектора.
Координате самог вектора остају непромењене!

Вектори у равни – координате вектора



Тачка $P(x_1, y_1)$ - почетак вектора $\vec{a}$

Тачка $Q(x_2, y_2)$ - крај вектора $\vec{a}$

$$\vec{a} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$$

$$a_1 = x_2 - x_1, \quad a_2 = y_2 - y_1$$

a_1 и a_2 су координате вектора $\vec{a}$

$$\vec{a} = (a_1, a_2)$$

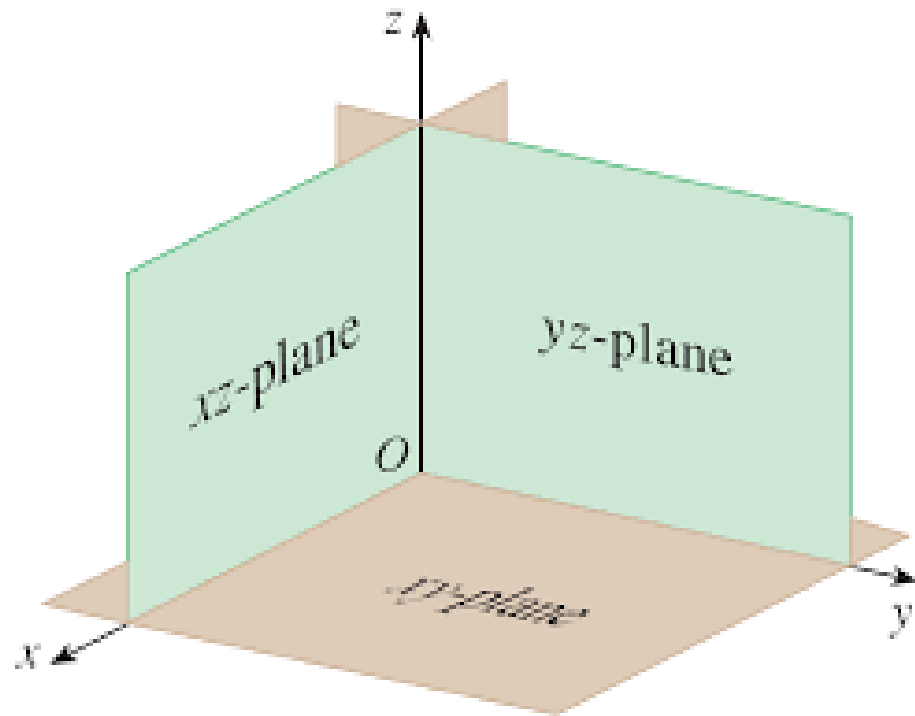
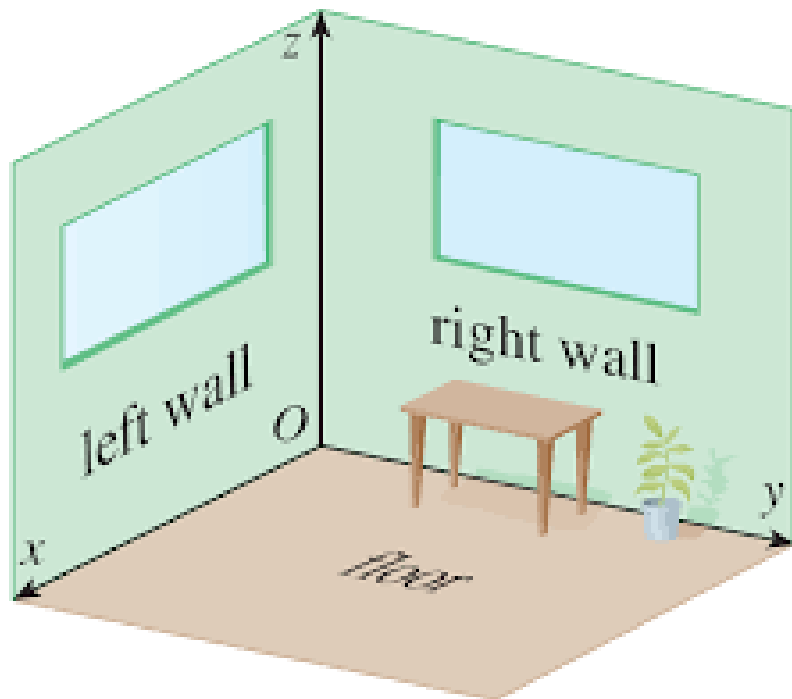
$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$$

Питагорина теорема: $|\vec{a}|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

Интензитет вектора $\vec{a}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

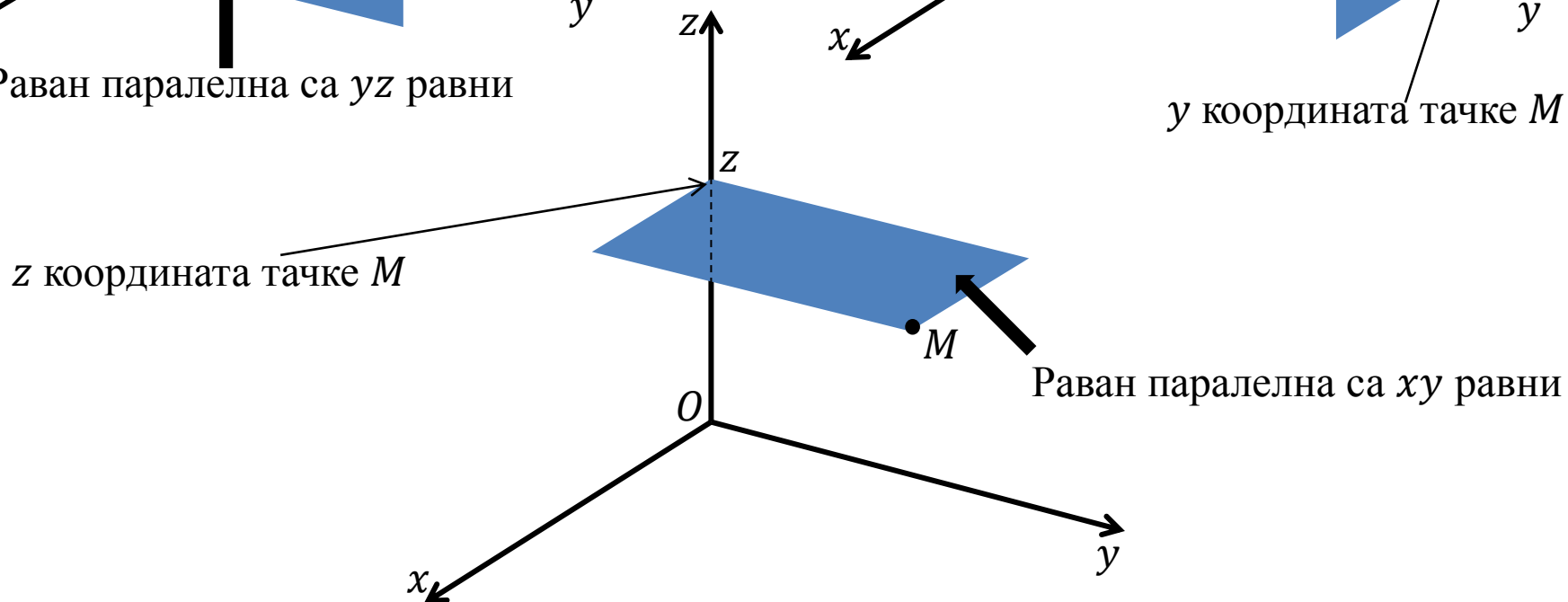
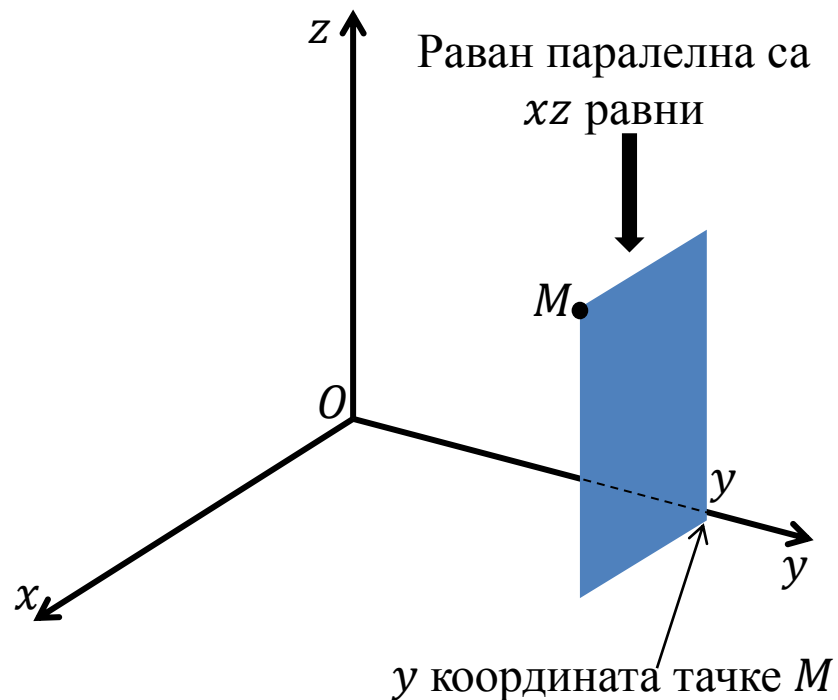
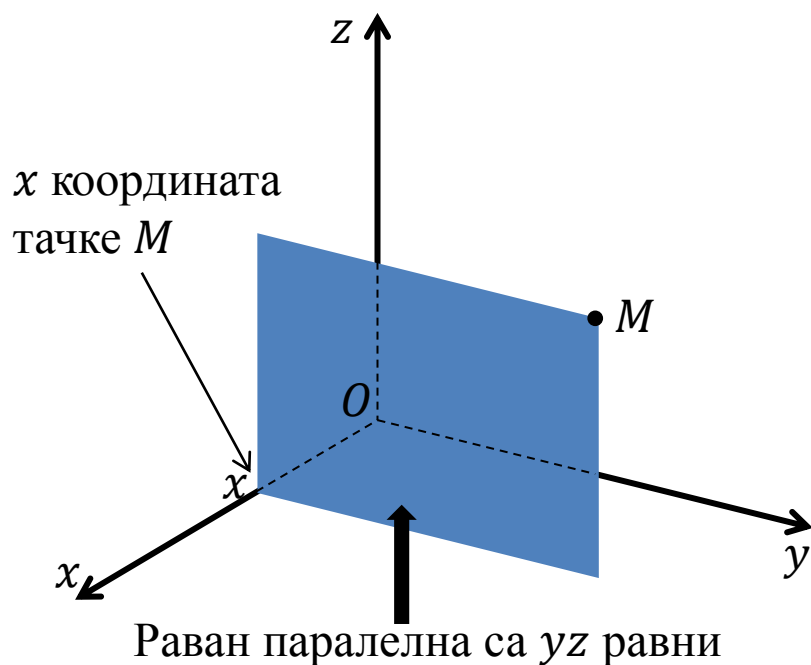
Декартов правоугли координатни систем у простору



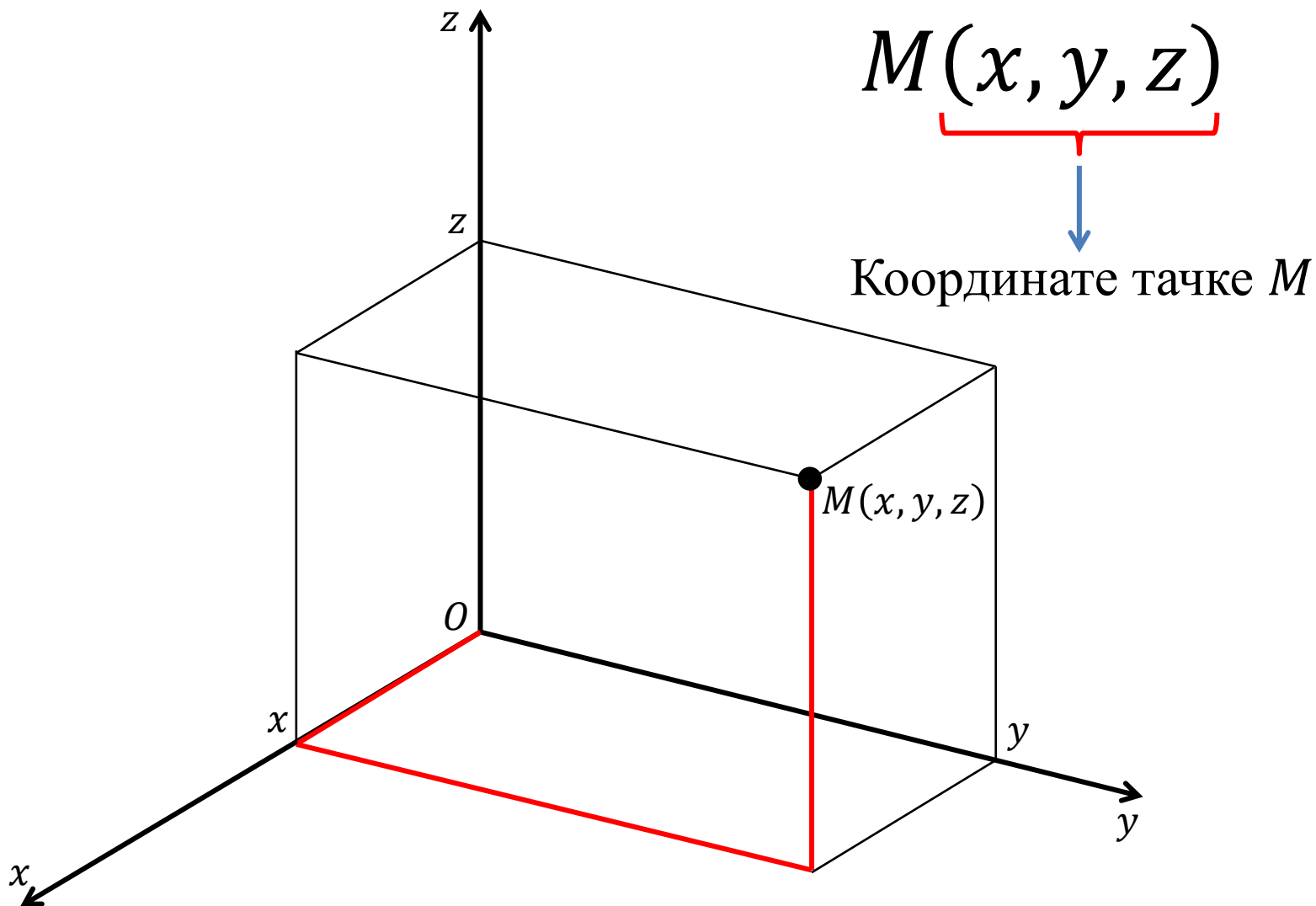
Три узајамно нормалне оријентисане праве, које пролазе кроз непокретну тачку O , образују **Декартов правоугли координатни систем**. Праве које образују правоугли координатни систем називају се **координатне осе** а њихова заједничка тачка O је **координатни почетак**.

Три координатне осе одређују три **координатне равни**. xy раван је раван која садржи x и y осу; yz раван је раван која садржи y и z осу; xz раван је раван која садржи x и z осу. Координатне равни деле простор на осам делова – **октанти**.

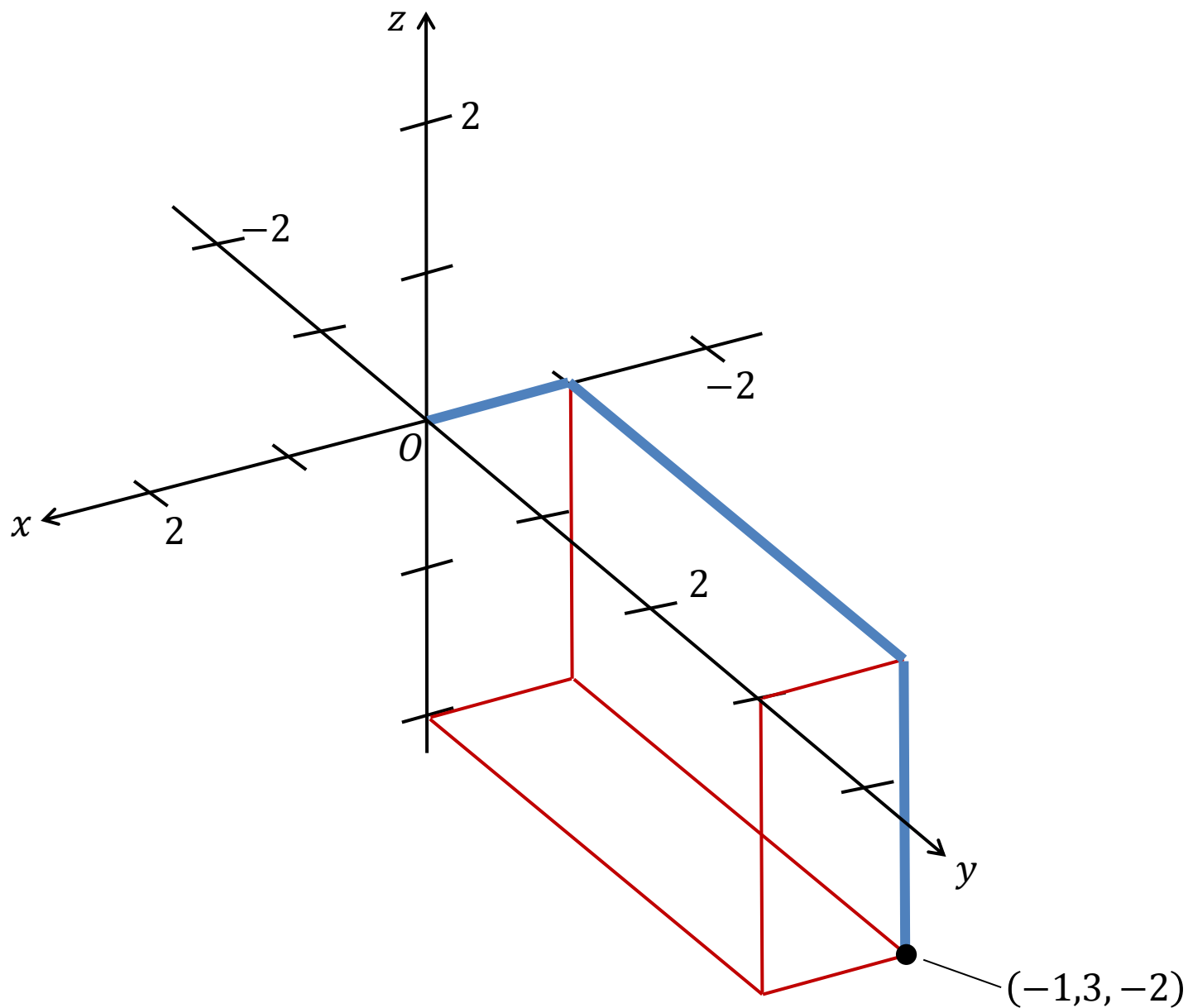
Декартов правоугли координатни систем у простору - координате тачке



Декартов правоугли координатни систем у простору - координате тачке

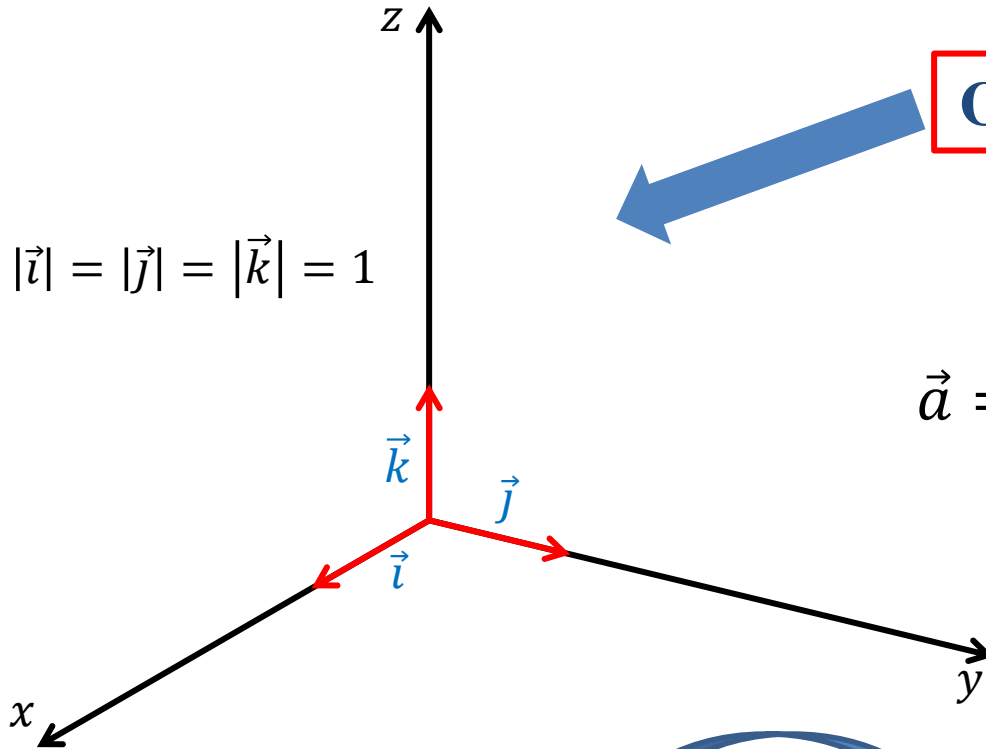


Декартов правоугли координатни систем у простору - координате тачке



Вектори у простору

Ортови координатних оса

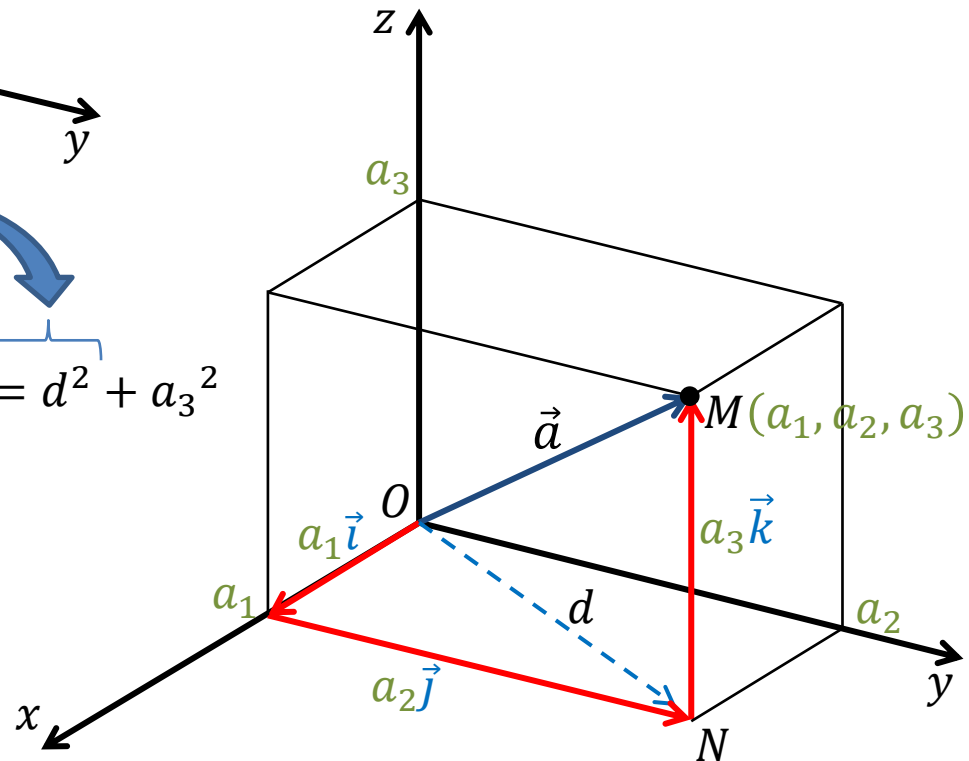


$$\vec{a} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$
$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

Питагорина теорема: $d^2 = a_1^2 + a_2^2$, $|\vec{a}|^2 = d^2 + a_3^2$

$$|\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$



Операције са векторима – алгебарски начин

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) + (b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) \\ &= (a_1\vec{i} + b_1\vec{i}) + (a_2\vec{j} + b_2\vec{j}) + (a_3\vec{k} + b_3\vec{k}) \\ &= (a_1 + b_1)\vec{i} + (a_2 + b_2)\vec{j} + (a_3 + b_3)\vec{k}\end{aligned}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\vec{i} + (a_2 + b_2)\vec{j} + (a_3 + b_3)\vec{k}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

$$\begin{aligned}\alpha\vec{a} &= \alpha(a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) = \alpha(a_1\vec{i}) + \alpha(a_2\vec{j}) + \alpha(a_3\vec{k}) \\ &= (\alpha a_1)\vec{i} + (\alpha a_2)\vec{j} + (\alpha a_3)\vec{k}\end{aligned}$$

$$\alpha\vec{a} = (\alpha a_1)\vec{i} + (\alpha a_2)\vec{j} + (\alpha a_3)\vec{k}$$

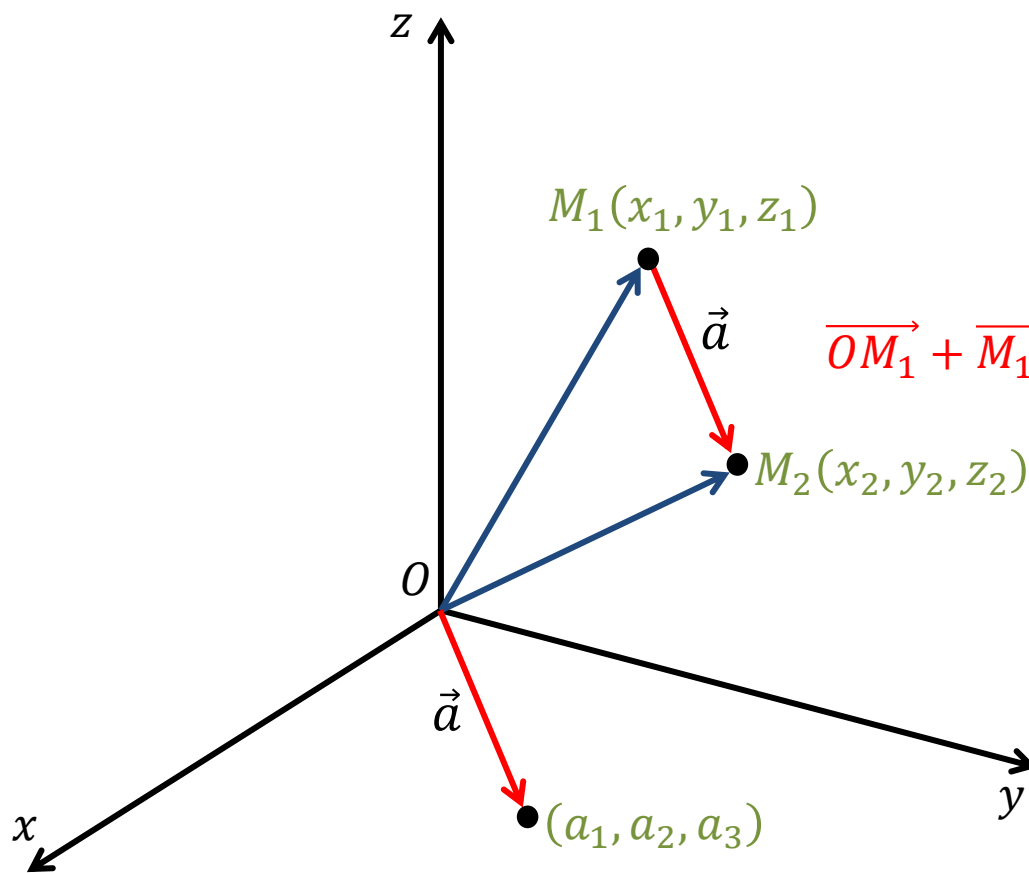
$$\alpha\vec{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3)$$

$$-\vec{b} = (-1)\vec{b} = (-b_1, -b_2, -b_3)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = (a_1 + (-b_1), a_2 + (-b_2), a_3 + (-b_3))$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$

Вектори у простору - наставак



$$\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2}$$

$$\overrightarrow{OM_1} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} = (x_1 + a_1)\vec{i} + (y_1 + a_2)\vec{j} + (z_1 + a_3)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OM_2} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

$$x_1 + a_1 = x_2$$

$$y_1 + a_2 = y_2$$

$$z_1 + a_3 = z_2$$

$$a_1 = x_2 - x_1$$

$$a_2 = y_2 - y_1$$

$$a_3 = z_2 - z_1$$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

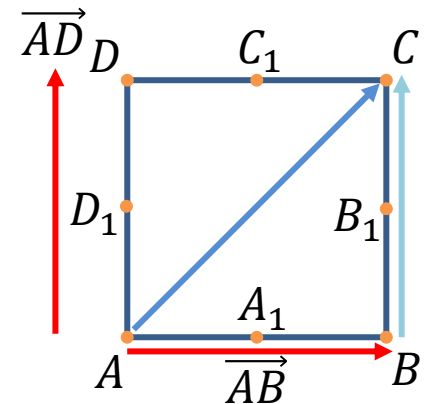
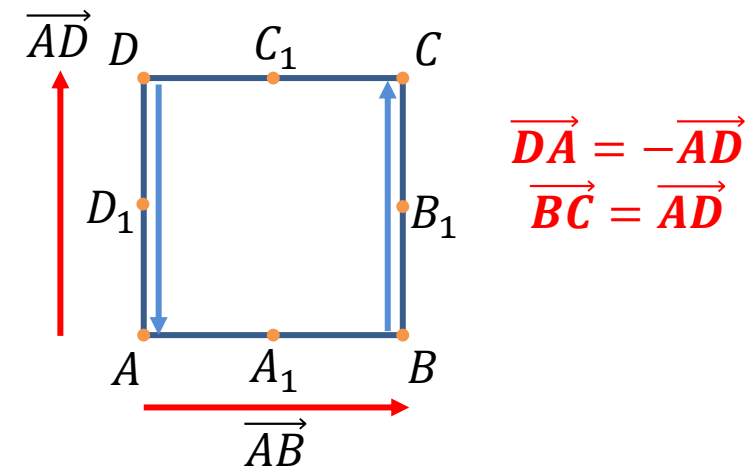
Координате
вектора $\vec{a}$

Да се одреде координате вектора $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$ треба од координата његовог краја M_2 одузети координате његовог почетка M_1 .

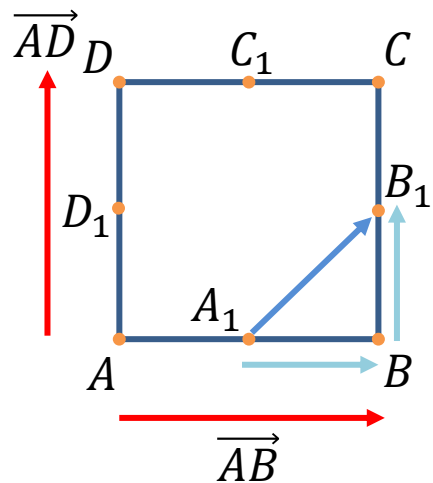
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Вектори - примери

Пример: Дат је квадрат $ABCD$. Нека су A_1, B_1, C_1, D_1 средине страница тог квадрата. Изразити преко вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ векторе $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{B_1C_1}, \overrightarrow{C_1D_1}$ и $\overrightarrow{A_1C}$.



$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

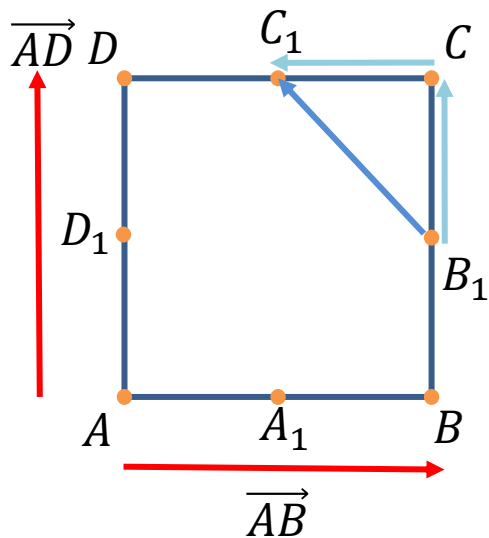


$$\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{BB_1}$$

$$\overrightarrow{A_1B} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BB_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$$

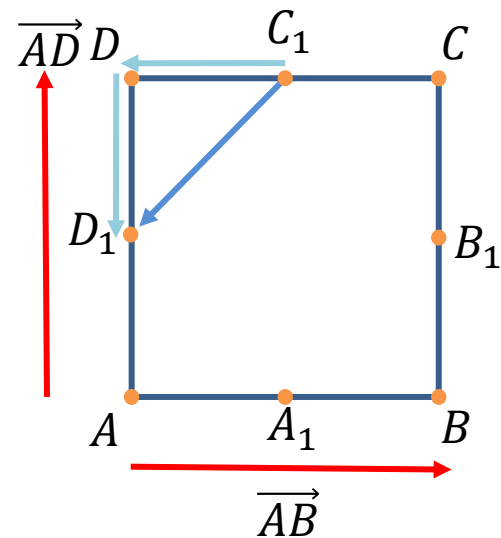
Вектори - примери



$$\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{B_1C} + \overrightarrow{CC_1}$$

$$\overrightarrow{B_1C} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \quad \overrightarrow{CC_1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

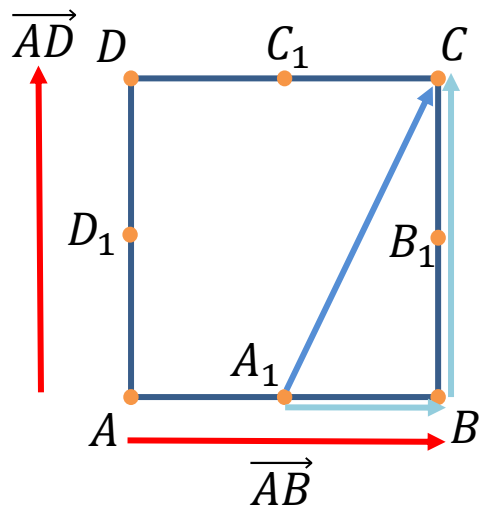
$$\overrightarrow{B_1C_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$$



$$\overrightarrow{C_1D_1} = \overrightarrow{C_1D} + \overrightarrow{DD_1}$$

$$\overrightarrow{C_1D} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{DD_1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{B_1C_1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB})$$



$$\overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{A_1B} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{A_1C} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

Вектори - примери

Пример: Скицирати вектор $\vec{u} = (3, 5)$ тако да му почетак буде тачка $(-3, 5)$.

Почетак вектора: $(-3, 5)$

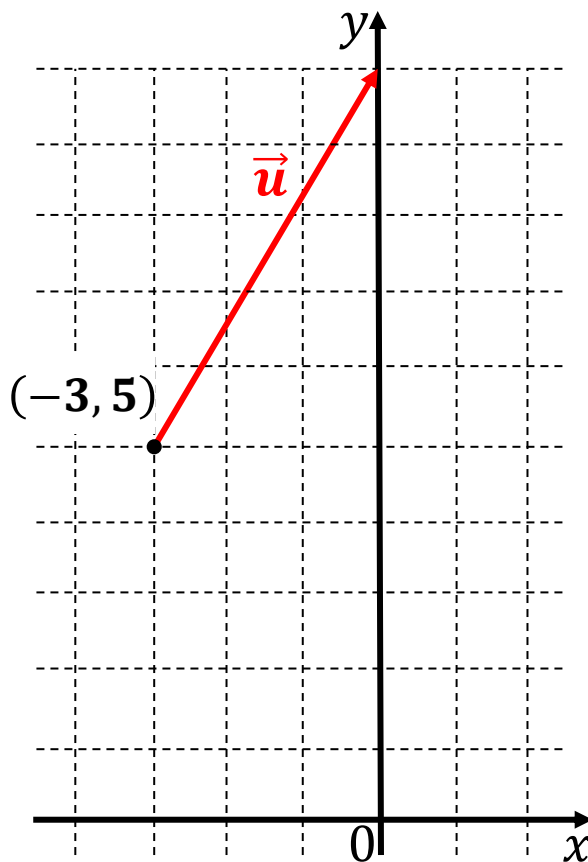
Крај вектора: (x, y)

$$\vec{u} = (3, 5)$$

$$x - (-3) = 3 \Leftrightarrow x + 3 = 3 \Leftrightarrow x = 0$$

$$y - 5 = 5 \Leftrightarrow y = 10$$

Крај вектора: $(0, 10)$



Вектори - примери

Пример: Наћи координате вектора $\vec{v}$ који има почетак у тачки $P(1,1,0)$ и крај у тачки $Q(6,2,0)$. Наћи $|\vec{v}|$ и јединични вектор вектора $\vec{v}$.

Почетак: $P(1,1,0)$

Крај: $Q(6,2,0)$

$$\vec{v} = (6 - 1, 2 - 1, 0 - 0) = (5, 1, 0) = 5\vec{i} + \vec{j}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{5^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{26}$$

Јединични вектор вектора $\vec{v}$: $\vec{v}_o = \frac{1}{|\vec{v}|} \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{26}} (5, 1, 0) = \left(\frac{5}{\sqrt{26}}, \frac{1}{\sqrt{26}}, 0 \right)$

$$\vec{v}_o = \left(\frac{5}{\sqrt{26}}, \frac{1}{\sqrt{26}}, 0 \right) = \frac{5}{\sqrt{26}} \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{26}} \vec{j}$$

Пример: Дат је вектор $\vec{a} = 5\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$. Израчунати $|-2\vec{a}|$.

$$|-2\vec{a}| = |-2||\vec{a}| = 2|\vec{a}|$$

Координате вектора $\vec{a}$: $\vec{a} = (5, 1, -3) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{5^2 + 1^2 + (-3)^2} = \sqrt{35}$

$$|-2\vec{a}| = 2|\vec{a}| = 2\sqrt{35}$$

Вектори - примери

Пример: Дати су вектори $\vec{v} = (-1, -1, 1)$ и $\vec{w} = (2, 0, 1)$. Наћи јединични вектор вектора $5\vec{v} + 3\vec{w}$.

$$5\vec{v} = 5(-1, -1, 1) = (-5, -5, 5)$$

$$3\vec{w} = 3(2, 0, 1) = (6, 0, 3)$$

$$5\vec{v} + 3\vec{w} = (-5 + 6, -5 + 0, 5 + 3) = (1, -5, 8)$$

$$|5\vec{v} + 3\vec{w}| = \sqrt{1^2 + (-5)^2 + 8^2} = \sqrt{90} = \sqrt{9 \cdot 10} = 3\sqrt{10}$$

Јединични вектор вектора $5\vec{v} + 3\vec{w}$ обележићемо са $\vec{a_0}$.

$$\vec{a_0} = \frac{1}{|5\vec{v} + 3\vec{w}|} (5\vec{v} + 3\vec{w}) = \frac{1}{3\sqrt{10}} (1, -5, 8) = \left(\frac{1}{3\sqrt{10}}, -\frac{5}{3\sqrt{10}}, \frac{8}{3\sqrt{10}} \right)$$

Пример: Дати су вектори $\vec{b} = -4\vec{i} + 6\vec{j}$ и $\vec{c} = 5\vec{i} - \vec{j} + 8\vec{k}$. Наћи координате вектора $7(\vec{c} - \vec{b})$.

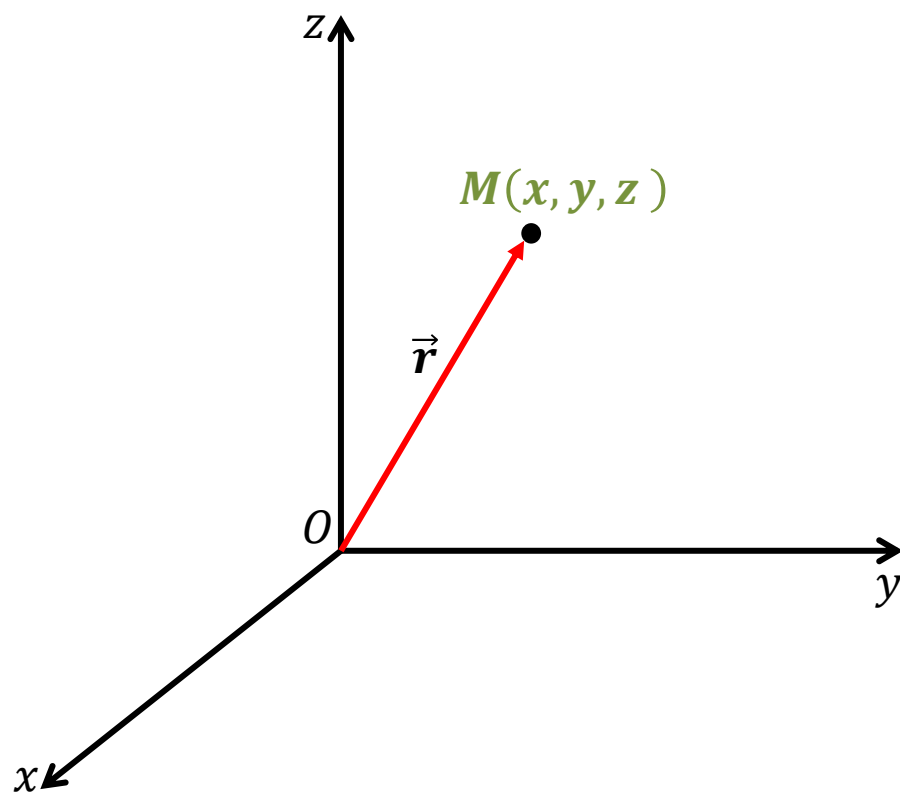
$$\vec{b} = (-4, 6, 0)$$

$$\vec{c} = (5, -1, 8)$$

$$\vec{c} - \vec{b} = (5 - (-4), -1 - 6, 8 - 0) = (9, -7, 8)$$

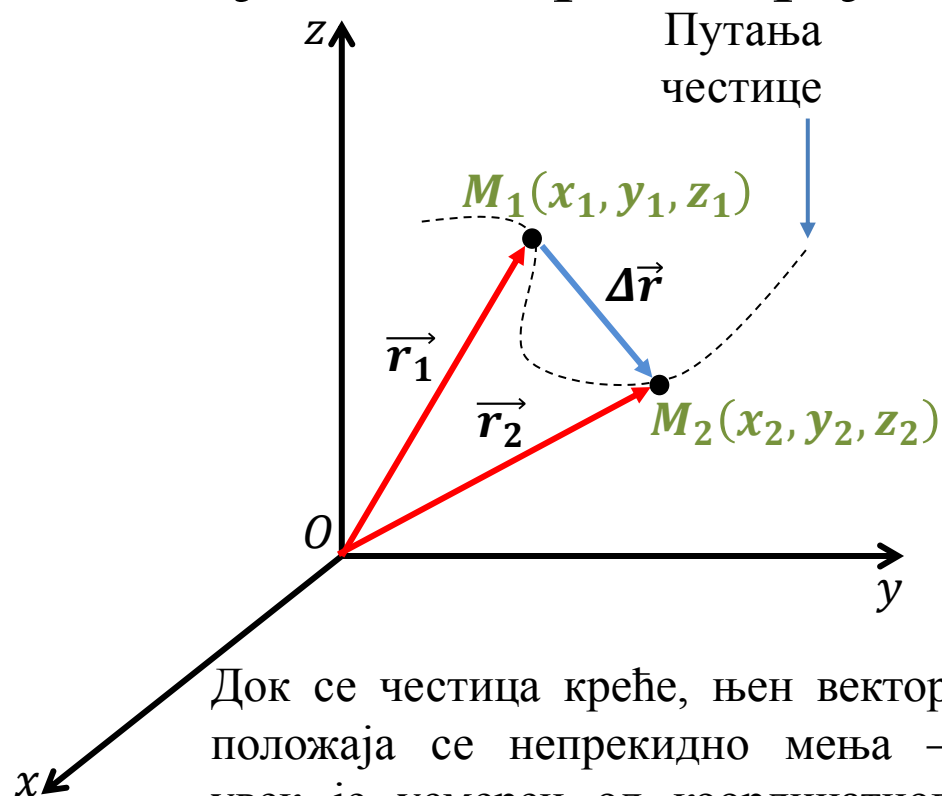
$$7(\vec{c} - \vec{b}) = 7(9, -7, 8) = (63, -49, 56)$$

Примена вектора – вектор положаја и вектор помераја



Вектор положаја материјалне тачке (честице) $\vec{r}$ је вектор који има почетак у координатном почетку, док је његов крај тачка $M(x, y, z)$ у којој се та честица тренутно налази.

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$



Док се честица креће, њен вектор положаја се непрекидно мења – увек је усмерен од координатног почетка до тачке у којој се честица тренутно налази.

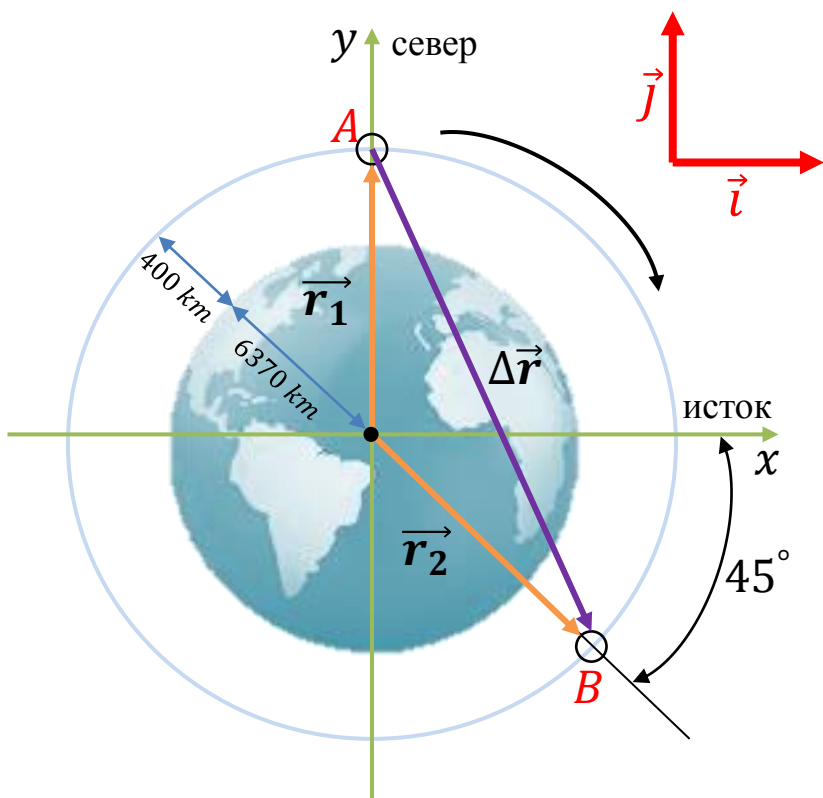
Ако се вектор положаја честице промени у току неког временског интервала од $\vec{r}_1$ до $\vec{r}_2$, онда је **вектор помераја** $\Delta\vec{r}$ дат са:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

Примена вектора – вектор положаја и вектор помераја

Сателит се креће по кружној орбити око Земље на висини од 400 km (прелази директно изнад северног и јужног пола). Наћи вектор помераја и растојање између положаја A и положаја B ? Полупречник Земље је 6370 km .



Растојање сателита од центра Земље износи $6370\text{ km} + 400\text{ km} = 6770\text{ km}$.

$$\vec{r}_1 = 6770\vec{j}$$

$$|\vec{r}_2| = 6770\text{ km}$$

Правоугли троугао OMB :

$$\frac{d}{|\vec{r}_2|} = \cos 45^\circ \Rightarrow d = |\vec{r}_2| \cos 45^\circ$$

$$d = 6770 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 4787\text{ km}$$

Правоугли троугао ONB :

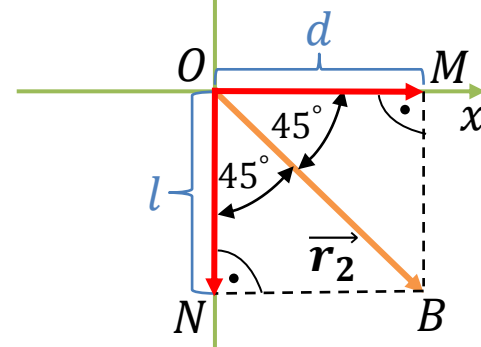
$$\frac{l}{|\vec{r}_2|} = \cos 45^\circ \Rightarrow l = |\vec{r}_2| \cos 45^\circ$$

$$l = 6770 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 4787\text{ km}$$

$$\vec{OM} = d\vec{i} \quad \vec{ON} = -l\vec{j}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{OM} + \vec{ON}$$

$$\vec{r}_2 = d\vec{i} - l\vec{j}$$



$$\vec{r}_2 = 4787\vec{i} - 4787\vec{j}$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = 4787\vec{i} - 4787\vec{j} - 6770\vec{j}$$

$$\Delta\vec{r} = 4787\vec{i} - 11557\vec{j}$$

Растојање између положаја A и положаја B :

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{4787^2 + (-11557)^2} \approx 12509\text{ km}$$

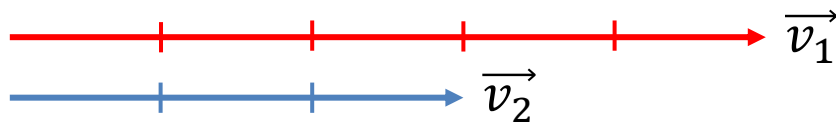
Примена вектора – брзина тела

Брзина тела је векторска величина. Вектор брзине се обично обележава са $\vec{v}$.

Претпоставимо да је путања тела права линија – праволинијско кретање.

- **Правец** вектора брзине $\vec{v}$ се поклапа са правцем путање;
- **Смер** вектора брзине $\vec{v}$ се поклапа са смером кретања;
- **Интензитет** вектора брзине $\vec{v}$ се обележава са v и рачуна се по формули $v = \frac{s}{t}$, где је s пређени пут и t је протекло време.

Пример: Два тела се крећу у истом правцу и смеру брзинама интензитета $v_1 = 5 \text{ m/s}$ и $v_2 = 3 \text{ m/s}$. Представити векторе брзина $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ графички, тако да један подељак одговара интензитету брзине од 1 m/s .



Пример: Нека се две кугле котрљају једна према другој у сусрет, с тим да је брзина прве кугле троструко већа од брзине друге кугле. Представити графички векторе брзина ових кугли.



Примена вектора – равнотежа материјалне тачке

Силу представљамо вектором. Ако на материјалну тачку P делују силе $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, онда је она у равнотежи ако важи:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \vec{0}$$

Пример: На материјалну тачку P делују силе $\vec{F}_1 = (2, 5)$ и $\vec{F}_2 = (3, -8)$. Наћи силу $\vec{F}_3$ тако да материјална тачка P буде у равнотежи.

$$\vec{F}_1 = (2, 5), \quad \vec{F}_2 = (3, -8), \quad \vec{F}_3 = (F_{3,x}, F_{3,y})$$

$$\text{Услов равнотеже: } \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$$

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (2 + 3, 5 + (-8)) = (5, -3)$$

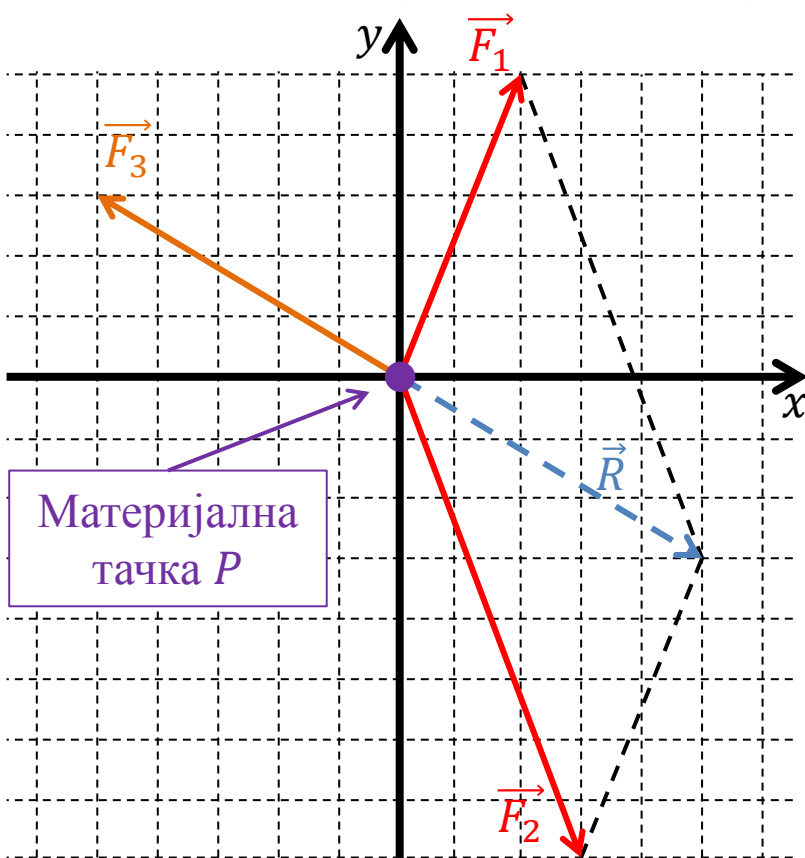
$$\vec{R} = (5, -3) \rightarrow \vec{R} \text{ је резуланта вектора } \vec{F}_1 \text{ и } \vec{F}_2$$

$$\vec{R} + \vec{F}_3 = \vec{0} \rightarrow (5 + F_{3,x}, -3 + F_{3,y}) = (0, 0)$$

$$5 + F_{3,x} = 0 \rightarrow F_{3,x} = -5$$

$$-3 + F_{3,y} = 0 \rightarrow F_{3,y} = 3$$

$$\vec{F}_3 = (-5, 3) = -5\vec{i} + 3\vec{j}$$



Примена вектора – векторско поље

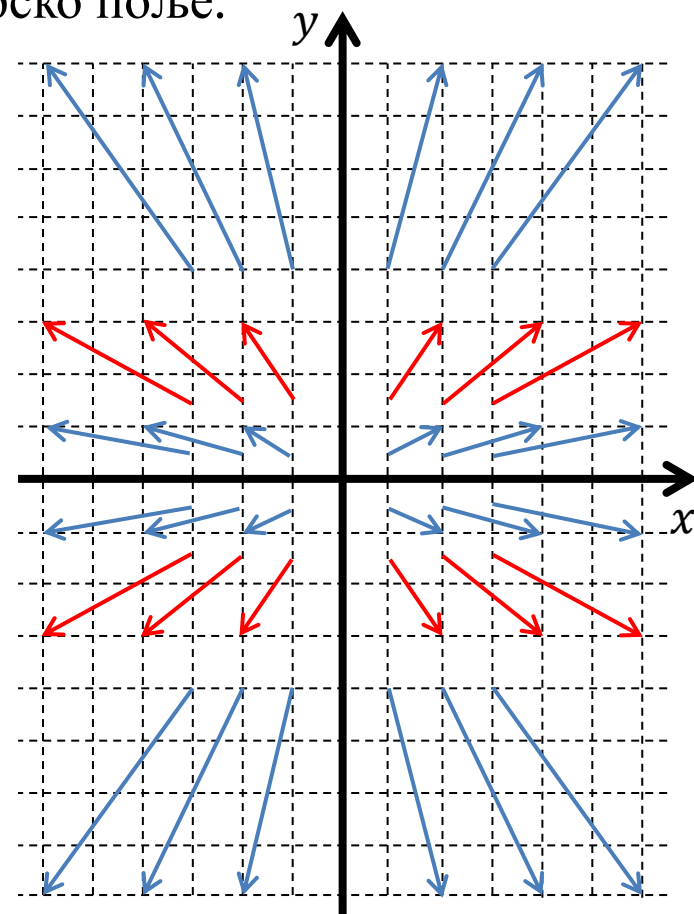
ВЕКТОРСКО ПОЉЕ:

Свакој тачки равни (или свакој тачки неког дела равни) придружујемо један вектор.

Пример: $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$ је векторско поље које тачки равни (x, y) придружује вектор $x\vec{i} + y\vec{j}$. Представимо графички ово векторско поље.

(x, y)	$\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$
$\left(1, \frac{3}{2}\right)$	$\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j}$
$\left(2, \frac{3}{2}\right)$	$2\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j}$
$\left(3, \frac{3}{2}\right)$	$3\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j}$
$\left(-1, \frac{3}{2}\right)$	$-\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j}$
$\left(-2, \frac{3}{2}\right)$	$-2\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j}$
$\left(-3, \frac{3}{2}\right)$	$-3\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j}$

(x, y)	$\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$
$\left(-1, -\frac{3}{2}\right)$	$-\vec{i} - \frac{3}{2}\vec{j}$
$\left(-2, -\frac{3}{2}\right)$	$-2\vec{i} - \frac{3}{2}\vec{j}$
$\left(-3, -\frac{3}{2}\right)$	$-3\vec{i} - \frac{3}{2}\vec{j}$
$\left(1, -\frac{3}{2}\right)$	$\vec{i} - \frac{3}{2}\vec{j}$
$\left(2, -\frac{3}{2}\right)$	$2\vec{i} - \frac{3}{2}\vec{j}$
$\left(3, -\frac{3}{2}\right)$	$3\vec{i} - \frac{3}{2}\vec{j}$



Вектори поља су усмерени супротно од координатног почетка. Што су вектори удаљенији од координатног почетка – њихов интензитет је већи. На пример, вектори поља могу да представљају брзину ветра у различитим тачкама неке области.